Remarques importantes concernant les propriétés du produit matriciel

Les propriétés de la multiplication des nombres réels dans $\mathbb{R}$ ne s'appliquent pas forcément au produit matriciel.

1) AB peut être défini sans que BA le soit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{(AB)_{2\times 1}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B_{3\times 1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2\times 3}} \text{ pas défini !}$$

2) Si AB et BA sont définis, on peut avoir $AB \neq BA$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{AB}$$

$AB \neq BA$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{BA}$$

3)
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{CD}$$

dans $\mathbb{R}$: $xy = 0$
$\Rightarrow (x=0)$ ou $(y=0)$

$CD = 0 \not\Rightarrow C = 0$ ou $D = 0$!

4)
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{AB}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{AC}$$

dans $\mathbb{R}$: $xy = xz$
avec $x \neq 0$,
alors $y = z$

$AB = AC \not\Rightarrow B = C$!

" l'arithmétique " des matrices est différente de ce que l'on connaît dans $\mathbb{R}$!

Définition 26 (transposée).
Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, sa transposée $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ est la matrice définie par
$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$
pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. Autrement dit, A^T est la matrice dont les colonnes sont formées par les lignes de A.

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{R})$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$

Théorème 15. *Soient $A, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. On a*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + C)^T = A^T + C^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

⚠ $A^T B^T$ n'est pas déf. en général

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$

$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$

$A^T B^T$ n'est pas défini car A^T a deux colonnes et B^T a une ligne.

Preuve du théorème 15.4

$(AB)^T \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$

Soit $1 \leq i \leq p$

$1 \leq j \leq m$

$$\left((AB)^T \right)_{ij} = (AB)_{ji}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj}$$
$$= (B^T A^T)_{ij}$$

Donc les matrices $(AB)^T$ et $B^T A^T$ ont les mêmes coefficients.

Observation

Quelles sont les conditions pour qu'une matrice A soit égale à sa transposée A^T ?

- matrice carrée
- symétrie par rapport à la diagonale principale :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A = A^T$

Définition 27 (symétrique, anti-symétrique, diagonale)**.**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On dit que

1. A est *symétrique* si $A^T = A$ $\qquad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq n$

2. A est *antisymétrique* si $A^T = -A$ $\qquad a_{ij} = -a_{ji}^{(*)} \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq n$

3. A est *diagonale* si $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Remarques

1. Pour les matrices carrées, on obtient la transposée en effectuant une symétrie par rapport à la diagonale principale sur les coefficients.

2. Pour toute une matrice antisymétrique A, les coefficients de la diagonale principale sont nuls.

En effet, $\forall\, 1 \leq i \leq n$ $\qquad a_{ii} = -a_{ii}$

$2a_{ii} = 0$ $\quad$ d'où $a_{ii} = 0$!

Exemples 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique

2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonale

4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique ni antisymétrique

5) I_n est diagonale. La matrice nulle est symétrique antisymétrique et diagonale !

6) Toute matrice diagonale est symétrique.

Théorème 16. *Toute matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.*

Preuve On écrit

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \\ &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \overbrace{\frac{1}{2}A^T - \frac{1}{2}A^T}^{=0} \\ &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T \\ &= \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned}$$

Or $A + A^T$ est symétrique :

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

Or $A - A^T$ est antisymétrique :

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$$

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{2}(A + A^T) = 1/2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ sym.

$\frac{1}{2}(A - A^T) = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ antisym.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sym.

$\frac{1}{2}(A - A^T) = A$ antisym.

Puissances de matrices

$A_{m\times n}$

$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{m\times n}{A}$

Soit $A \in \underline{M_{n\times n}}(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit

$$A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ fois}}$$

Pour que A^k soit définie la matrice doit être carrée

$$A^1 = A \qquad \underbrace{A^0 = I_n}_{\text{par convention}}$$

$x^r x^s = x^{r+s}$

$x^r \underbrace{x^0}_{=1} = x^{r+0} = x^r$

Exemples 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \underline{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}$

$A^k \neq k \cdot A$ $\qquad$ ($2A \neq A^2$ en général !)

$A^k \neq (a_{ij}^k)$ $\qquad \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}} \neq$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ etc...

Donc pour une matrice diagonale,

$$A^k = (a_{ij}^k)$$